

CHƯƠNG II. ĐỘNG HỌC

Bài 4. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

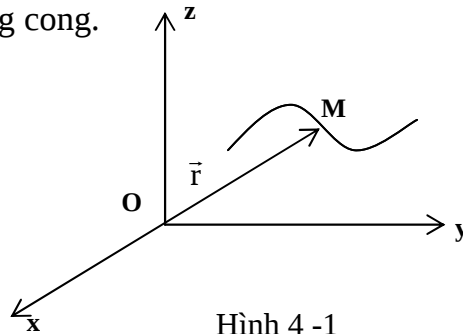
I. Phương pháp vectơ

1. Phương trình chuyển động của điểm

Xét điểm M chuyển động trong hệ quy chiếu Oxyz. Vị trí của điểm M được xác định bởi vectơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (hình 4 - 1). Vectơ $\vec{r}$ thay đổi phương chiều và độ dài theo thời gian. Liên hệ giữa $\vec{r}$ và t gọi là phương trình chuyển động của điểm dưới dạng vectơ:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (4.1)$$

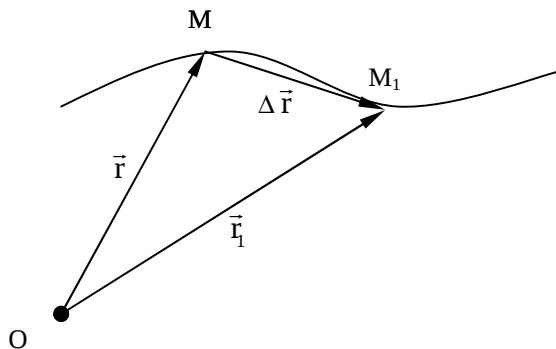
Quá tích của đường điểm trong hệ quy chiếu này gọi là quỹ đạo của điểm. Nếu quỹ đạo là thẳng thì chuyển động thẳng, nếu quỹ đạo là cong thì chuyển động cong.



Hình 4 -1

2. Vận tốc của điểm

Giả sử ở thời điểm t , đường điểm ở vị trí M được xác định bởi vectơ $\vec{r}$. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ đường điểm ở vị trí M_1 được xác định bởi vectơ $\vec{r}_1$. Như vậy, trong khoảng thời gian Δt , đường điểm di chuyển được một cung $\widehat{MM_1}$ ứng với $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}$ (hình 4 - 2)



Hình 4-2

Đôi lúc người ta viết $\vec{v}_{tb} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ gọi là vận tốc trung bình

Vận tốc của đường điểm tại thời điểm t được xác định như sau:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \quad (4.2)$$

Vậy vận tốc của động điểm bằng đạo hàm bậc nhất của vectơ định vị theo thời gian. Vectơ vận tốc của chất điểm hướng về phía chuyển động theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm đang xét.

Đơn vị vận tốc: m/s

3. Gia tốc của điểm

Vận tốc là đại lượng thay đổi theo thời gian. Đại lượng biểu thị cho sự thay đổi của vận tốc gọi là gia tốc. Ký hiệu $\vec{a}$

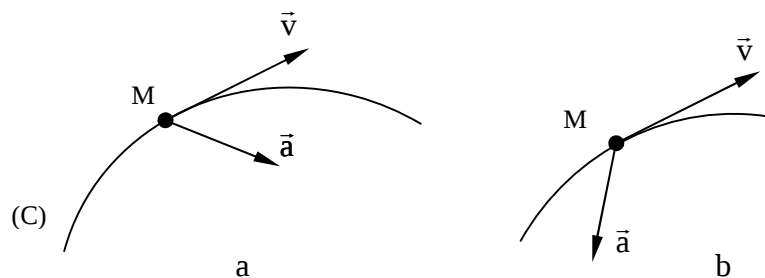
Tính toán như xác định vận tốc, gia tốc của động điểm tại thời điểm t được xác định như sau (hình 4 – 3):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$$

Vậy gia tốc của động điểm bằng đạo hàm bậc nhất của vận tốc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của vectơ định vị. Vectơ gia tốc luôn hướng về bên lõm của quỹ đạo.

Đơn vị gia tốc: m/s²

- Khi $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$: chất điểm chuyển động nhanh dần. (hình 4 – 3a)
- Khi $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: chất điểm chuyển động chậm dần. (hình 4 – 3b)



Hình 4 -3

II. Phương pháp tọa độ Descartes

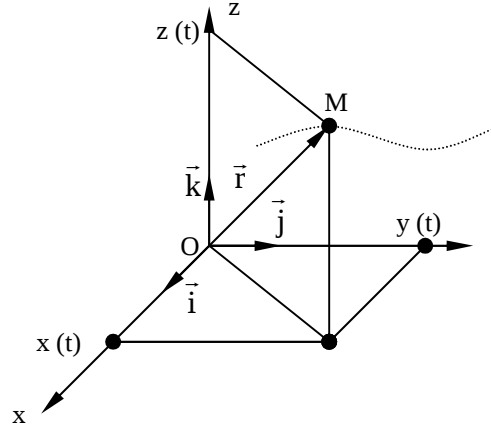
1. Phương trình chuyển động của điểm

Trong hệ tọa độ Descartes, vị trí của điểm M được xác định bởi 3 tọa độ (x, y, z) của nó. Khi M chuyển động, các thông số định vị này thay đổi theo thời gian

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (4-3)$$

(4.3) gọi là các phương trình chuyển động của điểm theo tọa độ Descartes

Khét trong các phđng trình chuyển đđng, ta có phđng trình quđ đđo cđ a đđng đđm.



Hình 4 – 4

Chú ý: gđ a phđng pháp véctđ và phđng pháp tođ đđ Descartes có sđ liên hđ chđt chđ nhđ sau

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Trong đđ: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véctđ đđ nđ trên các trđ c tođ đđ (hđnh 4 - 4)

2. Vđn tđ cđ a đđm

Gđ i v_x, v_y, v_z là hđnh chiđu cđ a $\vec{v}$ trên các trđ c tođ đđ thđ

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \quad (a)$$

$$\text{Mà } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Nđn } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

$$= x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k} \quad (b)$$

$$\text{So sđnh (a) và (b) ta rút ra: } v_x = x'(t); v_y = y'(t); v_z = z'(t) \quad (4.4)$$

Vđy các hđnh chiđu cđ a vđn tđ cđ trên các trđ c tđ a đđ Descartes bđng đđo hđm bđc nhđt theo thđ i gian cđ a các tđ a đđ tđ đđng đđng.

Trđ sđ, phđng chiđu cđ a vđn tđ cđ đđ đđ c đđnh nhđ sau:

$$- \text{Trđ sđ: } v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$- \text{Phđng chiđu: } \cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

α, β, γ : là gđc tđo bđ i $\vec{v}$ vđ i các trđ c tođ đđ x, y, z

3. Gia tốc của điểm

Tính thành phần vận tốc, gia tốc a_x, a_y, a_z là hình chiếu của $\vec{a}$ trên các trục tọa độ, ta có:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = x''(t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v'_y(t) = y''(t)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = v'_z(t) = z''(t)$$

$$- \text{Trên gia tốc: } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (4 - 5)$$

$$- \text{Phân giải: } \cos\alpha' = \frac{a_x}{a}; \cos\beta' = \frac{a_y}{a}; \cos\gamma' = \frac{a_z}{a}$$

α', β', γ' : là góc tạo bởi $\vec{a}$ với các trục tọa độ x, y, z

* Ví dụ: Viên đạn bay trong không gian oxy theo quy luật

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad (a)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \quad (b)$$

Trong đó v_0 là vận tốc, α là góc bắn.

Tìm vận tốc, gia tốc, quỹ đạo viên đạn, độ cao và tầm xa của viên đạn.

Giải

$$(a) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Thay vào (b) ta được:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + x \cdot \tan\alpha$$

Vậy quỹ đạo của viên đạn là đường Parabol

Vận tốc viên đạn:

$$v_x = x'(t) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = y'(t) = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$$

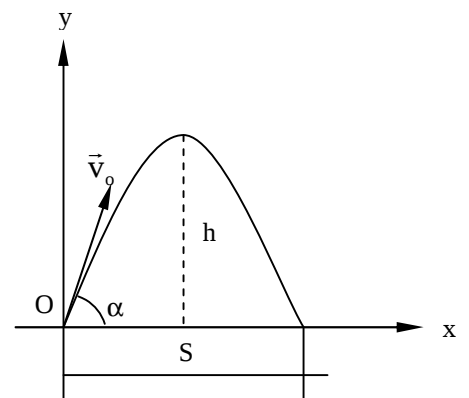
Gia tốc viên đạn:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

Khi viên đạn chạm đất thì $y(t) = 0$



$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ và } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (t \neq 0)$$

$$\text{Tầm xa của viên đạn: } s = x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Do tính đối xứng của Parabol, ta có độ cao của viên đạn đạt cực đại tại thời điểm $\frac{t}{2}$

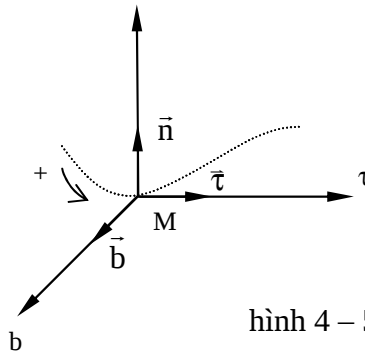
$$\Rightarrow h = y\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

III. Phân tích pháp tuyến tự nhiên

1. Phân tích trình chuyển động của điểm

a. Hệ toạ độ tự nhiên

Điểm trong mặt phẳng tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm M trục Mz hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo và phía dương, có vectơ đơn vị là $\vec{\tau}$. Điểm trục Mn hướng theo pháp tuyến của quỹ đạo và phía lõm Mn nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến gọi là pháp tuyến chính có vectơ đơn vị là $\vec{n}$. Điểm pháp tuyến Mb gọi là trùng pháp tuyến có vectơ đơn vị là $\vec{b}$ (thường chọn chiều của $\vec{b}$ sao cho $M_{\vec{\tau}\vec{n}\vec{b}}$ là tam diện thuận) (hình 4 - 5)

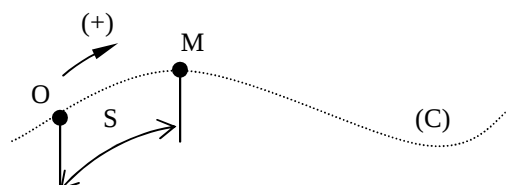


hình 4 - 5

Như vậy, tại mỗi điểm của đường cong, ta luôn có hệ toạ độ vuông góc có 3 trục hướng theo tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến gọi là hệ toạ độ tự nhiên. Hệ toạ độ tự nhiên thay đổi theo vị trí của điểm M trên quỹ đạo.

b. Phân tích trình chuyển động

Trên quỹ đạo của điểm chuyển động, ta chọn O làm gốc. Khi đó, vị trí của điểm chuyển động xác định bởi thông số $s = OM$. Khi M chuyển động, s biến thiên theo thời gian.



$s = s(t)$ gọi là phương trình chuyển động của điểm theo thời gian.

* Chú ý : s là đại lượng đại số . Tuy nhiên nếu chọn chiều dương của quỹ đạo là chiều chuyển động của điểm thì S luôn dương.

2. Vận tốc của điểm

Để xác định vận tốc $\vec{v}$ ta tìm hình chiếu của nó lên các trục của tọa độ tự nhiên. Vì $\vec{v}$ hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại M nên $\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}$ (vì $v_n = v_b = 0$)

$$|\vec{v}| = |v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |s'(t)|$$

Do của v_τ và $S'(t)$ luôn trùng nhau (cùng dấu nếu điểm chuyển động theo chiều dương của quỹ đạo và cùng âm trong trường hợp ngược lại).

$$\text{Vậy suy ra: } v_\tau = s'(t) \quad (4.6)$$

3. Gia tốc của điểm

Tìm vận tốc $\vec{v}$ ta tìm hình chiếu của nó trên các trục tọa độ tự nhiên ta có:

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} + a_b \cdot \vec{b} \quad (a)$$

Mặt khác :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \cdot \vec{\tau}) = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Theo hình vẽ vi phân thì $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ với ρ là bán kính cong quỹ đạo tại điểm đang xét

$$\text{Vậy ta có : } \vec{a} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta suy ra:

$$a_\tau = v'_\tau(t) = S''(t) ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} ; \quad a_b = 0 \quad (4.7)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (4.8)$$

Vì $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ luôn dương nên $\vec{a}$ luôn hướng vào bên lõm của quỹ đạo .

* Ý nghĩa của các thành phần gia tốc:

- $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ khi $\rho \rightarrow \infty$ tức là điểm chuyển động thẳng

- $a_n \neq 0$ điểm chuyển động cong.

Vậy, a_n biểu thị cho sự đổi hướng của vận tốc.

- $a_\tau = v'_\tau(t) = 0$ thì $v_\tau = \text{hằng số}$, tức là chuyển động đều.
- $a_\tau \neq 0$ thì v_τ biến thiên, chuyển động không đều.

Vậy, a_τ biểu thị cho sự thay đổi về tốc độ của vận tốc.

- + Khi a_τ và v cùng dấu: Chuyển động nhanh dần.
- + Khi a_τ và v ngược dấu: Chuyển động chậm dần.

* **Ví dụ**: Chuyển động trên vòng tròn bán kính $r = 1\text{m}$ theo phương trình $s = t^3 - 16t$

(s tính bằng mét, t tính bằng giây)

- Xác định vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t = 2\text{s}$
- Xét xem ở thời điểm đó, chuyển động nhanh hay chậm dần.

Giải

$$v = s'(t) = 3t^2 - 16$$

Khi $t = 2\text{s}$ thì $v = 3 \cdot 2^2 - 16 = -4 \text{ m/s}$

$$a_\tau = v'(t) = 6t = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(-4)^2}{1} = 16 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m/s}^2$$

Vì a_τ và v trái dấu nên chuyển động chậm dần

IV. Chuyển động thẳng đều

1. Chuyển động đều

Chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của điểm chuyển động có trị số không đổi.

$$v = \text{hằng số}$$

$$a_\tau = v'_\tau(t) = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

a. Chuyển động thẳng đều

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \quad (\rho \rightarrow \infty) ; \quad a_\tau = 0$$

Phương trình chuyển động: $S = S_0 + vt$

Trong đó: v và S_0 thường là vận tốc và tọa độ cong ban đầu của điểm.

b. Chuyển động cong đều

$$a_{\tau} = 0 \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$$

Phương trình chuyển động : $s = s_0 + vt$

2. Chuyển động biến đổi đều

Là chuyển động mà gia tốc tỉ lệ tuyến tính với thời gian có giá trị không đổi.

$$a_{\tau} = \text{hằng số} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad v = v_0 + a_{\tau}t$$

a. Chuyển động thẳng biến đổi đều

$$a_n = 0 \quad ; \quad a_{\tau} = \text{hằng số}$$

$$v = v_0 + a_{\tau}t$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

b. Chuyển động cong biến đổi đều

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad a_{\tau} = \text{hằng số} \quad ; \quad a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

$$v = v_0 + a_{\tau}t$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

* **Ví dụ :** Một điểm chuyển động nhanh dần đều trên cung tròn bán kính $r = 1000\text{m}$, từ trạng thái đứng yên sau 2 phút nó đi được quãng đường $s = 1200\text{m}$. Hãy tính vận tốc và gia tốc sau 2 phút đó.

Giải

$$\text{Ta có : } s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

$$\text{chọn } s_0 = 0$$

Một khác $v_0 = 0$ (ban đầu điểm đứng yên)

$$\text{Nên } s = \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

$$\Rightarrow a_{\tau} = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1200}{120^2} = \frac{1}{6} \text{ m/s}^2$$

Vận tốc sau 2 phút:

$$v = v_0 + a_{\tau}t = a_{\tau} \cdot t = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{Gia tốc pháp tuyến: } a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{1000} = 0,4 \text{ m/s}^2$$

Gia tốc sau 2 phút:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + (0,4)^2} = 0,43 \text{ m/s}^2$$

Bài 5. CHUYỂN ĐỘNG NGẪU BẰNG CỦA VẬT RẮN

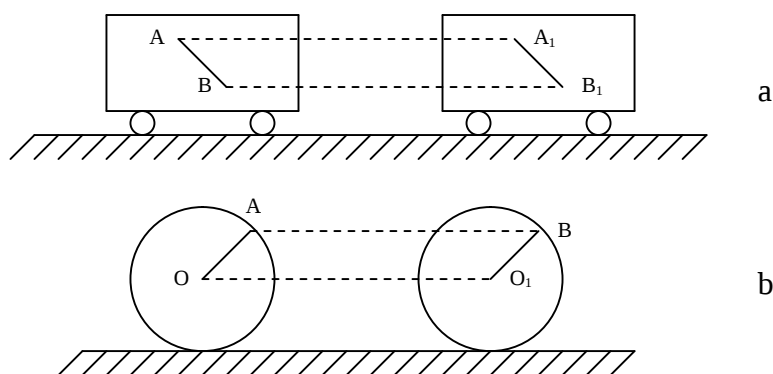
I. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

1. Định nghĩa

Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động trong đó lấy bất kỳ điểm nào trên vật cũng luôn song song với vị trí ban đầu của nó.

Trong thực tế gặp rất nhiều trường hợp vật chuyển động tịnh tiến. Vật rắn chuyển động tịnh tiến thường gặp là:

- Tịnh tiến thẳng: Toa xe lửa chuyển động trên đường ray (hình 16 – 1a)
- Tịnh tiến cong: Thanh truyền AB trong cơ cấu hình bình hành của máy xe lửa (hình 16 – 1b)



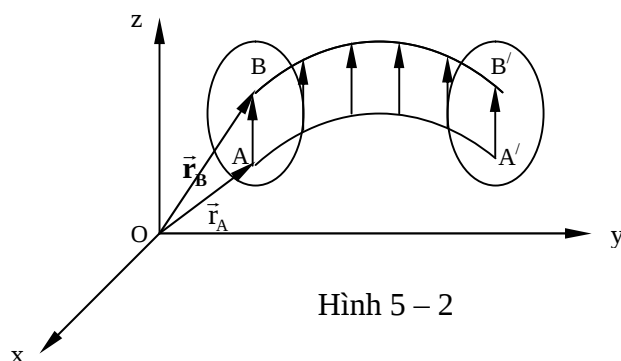
hình 5 - 1

2. Tính chất của chuyển động tịnh tiến

Định lý: Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật vẽ nên những quỹ đạo đồng dạng nhau (có thể đồng trùng khít lên nhau), tại mọi thời điểm, các điểm thuộc vật có vận tốc bằng nhau và gia tốc bằng nhau.

Chứng minh:

Lấy 2 điểm A, B bất kỳ thuộc vật. Giả sử vị trí của chúng tại thời điểm t được xác định bởi các vectơ $\vec{r}_A$ và $\vec{r}_B$ (hình 16 - 2)



Hình 5 – 2

$$\text{Định nghĩa } \overrightarrow{AB}, \text{ ta có: } \vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \quad (5.1)$$

Trong đó: $\overrightarrow{AB}$ là vectơ có môđun và phương chiều không đổi (vật rắn chuyển động tịnh tiến). Do đó, vị trí của điểm B có được bằng cách dịch chuyển song song các điểm trên quỹ đạo của A đi cùng một vectơ không đổi $\overrightarrow{AB}$. Vậy quỹ đạo của điểm A và B là những đường cong giống nhau (tức là có thể đặt trùng khít lên nhau).

Để xác định vận tốc các điểm A và B ta lấy đạo hàm hai vế của (5.1) theo thời gian:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$$

$$\text{Vì } \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$$

$$\text{Nên } \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \text{hay} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B$$

Tiếp tục lấy đạo hàm theo hai vế của đẳng thức $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ ta được:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad \text{hay} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Vậy, với một đường học vật rắn chuyển động tịnh tiến được thay thế bằng chuyển động của điểm bất kỳ thuộc vật. Do đó, việc khảo sát vật rắn chuyển động tịnh tiến được đưa về bài toán đường học điểm (đã khảo sát ở bài 4).

II. Chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định

1. Định nghĩa

Vật rắn quay quanh trục cố định khi trong quá trình chuyển động, vật có hai điểm bất kỳ cố định.

Trục đi qua hai điểm cố định đó gọi là trục quay của vật.

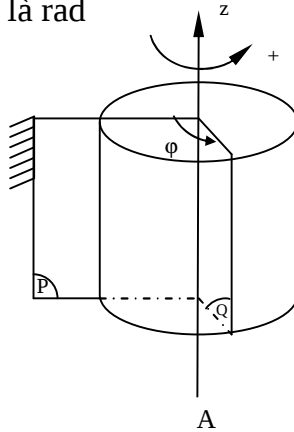
Khi một vật quay quanh trục cố định, mọi điểm thuộc vật chuyển động trên một đường tròn có tâm nằm trên trục quay, có bán kính bằng khoảng cách từ điểm đó đến trục quay.

2. Phương trình chuyển động của điểm

Giả sử vật rắn (A) quay quanh trục cố định Z. Điểm mặt phẳng (P) cố định và chứa trục Z làm chuôi, đường thẳng đứng mặt phẳng (Q) gắn liền với vật (A) (hình 17 – 1). Nhờ vậy vị trí của vật (A) hoàn toàn xác định bởi góc φ giữa hai mặt phẳng [P] và [Q]. Khi vật quay, góc quay φ luôn thay đổi theo thời gian nên:

$$\varphi = \varphi(t) \text{ gọi là phương trình chuyển động của điểm} \quad (5-2)$$

Đơn vị góc quay là rad



Hình 5 - 3

Trong kỹ thuật, góc quay của vật thường được tính theo số vòng quay N. Liên hệ giữa φ và N như sau :

$$\varphi = 2\pi.N \quad (5.3)$$

Góc quay φ là góc đi của trục quay theo mặt chiếu nhất định thì ta chọn chiều quay đó là chiều dương.

3. Vận tốc góc

Khi vật quay, góc quay φ biến thiên theo thời gian. Để biểu thị tốc độ quay và chiều quay của vật, ta đưa ra khái niệm vận tốc góc.

Ký hiệu: ω

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t) \quad (5.4)$$

Đơn vị đo của ω là rad/s

Vận tốc góc tại các trục của vật rắn quay quanh trục cố định tại một thời điểm nào đó bằng đạo hàm bậc nhất của góc quay theo thời gian cũng tại thời điểm đó.

Trong kỹ thuật, vận tốc góc thường được đo bằng số vòng quay trong một phút (vòng/phút) gọi là vận tốc vòng. Ký hiệu: n

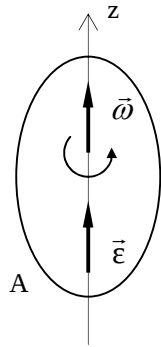
Liên hệ giữa ω và n:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \left(\text{rad/s} \right) \quad (5.5)$$

Gọi $\vec{k}$ là vectơ đơn vị trên trục z, ta gọi vectơ

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \varphi'(t) \vec{k}$$

là vectơ vận tốc góc của vật quay. Với vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ cho ta biết chiều của trục quay, chiều quay và vận tốc quay của vật (hình 17 - 2)



Hình 5 - 4

4. Gia tốc góc

Vật rắn nói chung mỗi lúc quay nhanh chậm khác nhau, có khi còn thay đổi chiều quay. Để biểu thị cho sự thay đổi đó của vận tốc góc theo thời gian gọi là gia tốc góc. Ký hiệu $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}'(t) = \varphi''(t) \quad (5.6)$$

Đơn vị đo của gia tốc góc là rad/s^2 .

Vậy gia tốc góc thì có vật quay thì mỗi thời điểm nào đó bằng đạo hàm bậc nhất của vận tốc góc theo thời gian hoặc bằng đạo hàm bậc hai của góc quay theo thời gian tại thời điểm đó.

Ta có vectơ : $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} \cdot \vec{k}$

là vectơ gia tốc góc của vật. Vậy vectơ gia tốc góc cũng là vectơ nằm trên trục Z, trục số và chiều để xác định bởi dấu của gia tốc góc $\bar{\epsilon}$ (hình 17 – 2).

Vật chuyển động quay nhanh dần hay chậm dần lúc tốc độ quay tăng hay giảm theo thời gian. Do đó, dấu hiệu của chuyển động nhanh dần, chậm dần là :

- $\bar{\omega} \cdot \bar{\epsilon} > 0$: vật chuyển động quay nhanh dần.
- $\bar{\omega} \cdot \bar{\epsilon} < 0$: vật chuyển động quay chậm dần.

5. Các chuyển động quay thông dụng

1. Chuyển động quay đều

$$\bar{\omega} = \text{hằng số} \quad \text{và} \quad \bar{\epsilon} = 0$$

$$\text{Phương trình chuyển động : } \varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (5.7)$$

2. Chuyển động quay biến đổi đều

$\bar{\epsilon}$ là hằng số

$$\text{Phương trình chuyển động : } \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \epsilon t^2 \quad (5.8)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t$$

Nếu chọn chiều dương trùng với chiều quay ban đầu của vật thì :

- $\epsilon > 0$: vật quay nhanh dần đều.
- $\epsilon < 0$: vật quay chậm dần đều.

* **Ví dụ 1:** Vật quay quanh trục có độ lệch theo phương trình: $\varphi = 2t^2 + t + 1$ (φ tính bằng rad, t tính bằng giây)

Xác định: a) Góc quay của vật trong 3 giây đầu?

b) Vận tốc góc và gia tốc góc tại thời điểm $t = 3s$?

c) Vật có đổi chiều quay hay không?

Giải

a) Góc quay của vật trong 3 giây đầu:

– Tại thời điểm đầu $t_0 = 0$ thì $\varphi_0 = 1\text{rad}$

– Tại thời điểm sau $t_1 = 3s$ thì $\varphi_1 = 2.3^2 + 3 + 1 = 22\text{ rad}$

Vậy góc quay $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = 22 - 1 = 21\text{ rad}$

b) Vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t = 3s$

– $\omega = \varphi'(t) = 4t + 1 = 4.3 + 1 = 13\text{ rad/s}$

– $\varepsilon = \omega'(t) = 4\text{ rad/s}^2$

c) Vật không đổi chiều quay vì $\omega = 4t + 1 > 0 \forall t$

* **Ví dụ 2:** Một trục máy trong giai đoạn máy quay nhanh dần đều. Sau 5 phút đạt vận tốc $n = 120$ vòng/phút. Tính gia tốc góc của trục và số vòng quay được trong 5 phút đó.

Giải

Ta có: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$

vì $\omega_0 = 0$ nên $\omega = \varepsilon t$

Trong đó : $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi.120}{30} = 4\pi\text{ rad/s}$

Khi $t = 5\text{ phút} = 300\text{ giây}$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{300} = \frac{\pi}{75}\text{ rad/s}^2$$

Ta lại có: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

Chọn $\varphi_0 = 0$

$\omega_0 t = 0$ (vì $\omega_0 = 0$)

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{75} \cdot 300^2 = 600\pi\text{ rad}$$

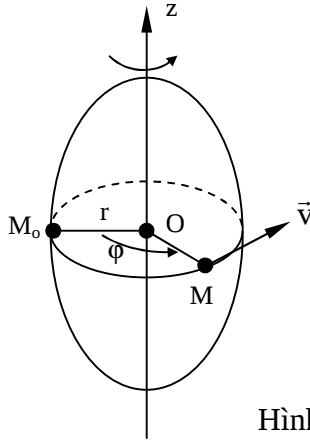
Một khác: $\varphi = 2\pi N$

$$\Rightarrow N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{600\pi}{2\pi} = 300\text{ vòng}$$

6. Chuyển động của điểm thuộc vật rắn quay quanh trục cố định

a. Phương trình chuyển động

Xét điểm M bất kỳ thuộc vật với khoảng cách từ M đến trục quay không đổi $r = OM$. Ta dùng phương pháp tia để tìm nhiên đạo khảo sát chuyển động của điểm M . Chọn tia để song $S = M_0M$, thì phương trình chuyển động của điểm M là: $S = r \cdot \varphi(t)$ (5-9)



Hình 5-5

b. Vận tốc của điểm thuộc vật

$$\text{Ta có: } \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \varphi) = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

vì chiều của vectơ $\vec{v}$ bao giờ cũng luôn chiều quay của vật, tức là chiều của vận tốc góc ω nên:

$$v = r \cdot \omega \quad (5.10)$$

c. Gia tốc góc của điểm thuộc vật

$$\text{Ta có: } \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\text{Mà: } a_t = v'(t) = r \cdot \omega'(t) = r \cdot \varepsilon$$

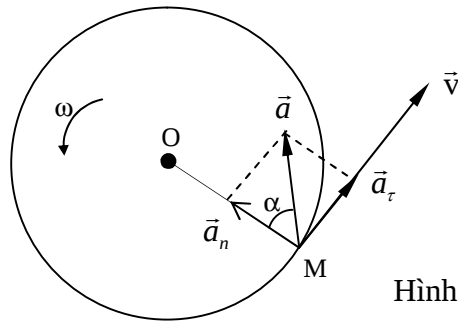
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

$$\text{Gia tốc toàn phần: } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (5-11)$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc nghiêng của } \vec{a} \text{ với bán kính, ta có: } \tan \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

– Vận tốc, vận tốc và gia tốc các điểm thuộc vật quay quanh trục cố định tỉ lệ với bán kính r .

– Cùng một thời điểm, gia tốc các điểm hợp với bán kính tỉ lệ nghịch của chúng góc α nhau (hình 17 - 4).



Hình 5- 6

* **Ví dụ :** Một vật quay quanh trục cố định O. Một điểm khảo sát, điểm A cách trục quay khoảng $r = 0,5\text{m}$ có vận tốc $v = 2\text{m/s}$ và gia tốc là $8\sqrt{3} \text{ m/s}^2$

a) Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của vật.

b) Tìm vận tốc và gia tốc điểm B cách trục quay khoảng $r = 0,2\text{m}$?

Giải

a) Vận tốc góc và gia tốc góc của vật

$$v_A = r \cdot \omega$$

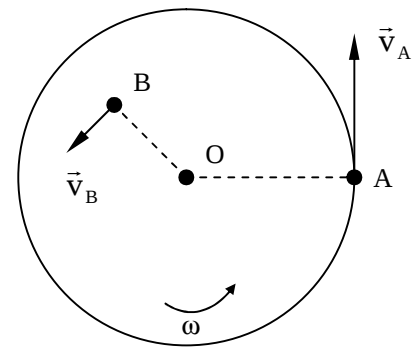
$$\Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ rad/s}$$

$$a_n = r \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot 4^2 = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Mà } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$\Rightarrow a_\tau = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{Mà } a_\tau = r \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{8\sqrt{2}}{0,5} = 16\sqrt{2} \text{ rad/s}^2$$



b) Tìm vận tốc và gia tốc điểm B

$$v_B = r \cdot \omega = 0,2 \cdot 4 = 0,8 \text{ m/s}$$

$$a_{\tau B} = r \cdot \varepsilon = 0,2 \cdot 16\sqrt{2} = 3,2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$a_{nB} = \frac{v_B^2}{r} = \frac{0,8^2}{0,2} = 3,2 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{\tau B}^2 + a_{nB}^2} = \sqrt{(3,2\sqrt{2})^2 + (3,2)^2} = 3,2\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

Bài 6. TỌA NG HẸP CHUYỂN ĐỘNG CỦA A ĐIỂM M VÀ VẬN TỐC N

I. Tổng hợp chuyển động của điểm

1. Định nghĩa các chuyển động

Giả sử có điểm di chuyển M, hệ quy chiếu động Oxyz và hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$ (hình 6 - 1).

- Chuyển động của M so với hệ quy chiếu động gọi là chuyển động tịnh tiến đi, tịnh tiến ta có quỹ đạo tịnh tiến đi và vận tốc tịnh tiến đi.

Ký hiệu $\vec{v}_r$

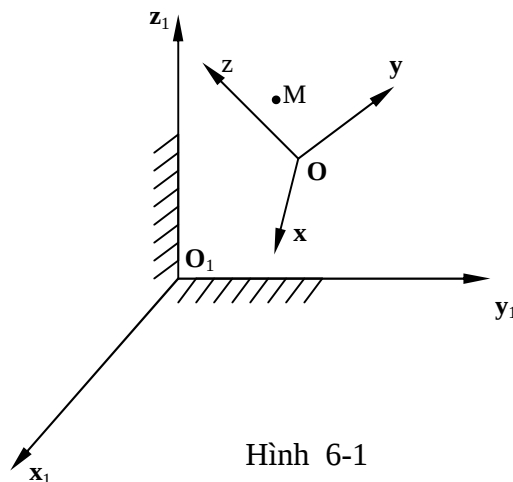
- Chuyển động của M cùng với hệ quy chiếu động đi với hệ quy chiếu cố định gọi là chuyển động theo, tịnh tiến ta có quỹ đạo theo và vận tốc theo.

Ký hiệu $\vec{v}_e$

- Chuyển động của điểm so với hệ quy chiếu cố định gọi là chuyển động tuyệt đối đi, tịnh tiến ta có quỹ đạo tuyệt đối đi và vận tốc tuyệt đối đi.

Ký hiệu $\vec{v}_a$

Vậy, chuyển động tuyệt đối đi là tổng hợp của hai chuyển động, chuyển động tịnh tiến đi và chuyển động theo.



Hình 6-1

2. Định lý hợp vận tốc

Tại mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của chất điểm M bằng tổng hình học của vận tốc theo và vận tốc tịnh tiến đi.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (6 - 1)$$

Chứng minh:

Điểm di chuyển M được xác định bởi vectơ $\vec{r}$ và $\vec{r}_i$, gốc O được xác định bởi $\vec{r}_0$. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của hệ trục oxyz, ta có $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Theo hình 6 – 2, ta có:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}$$

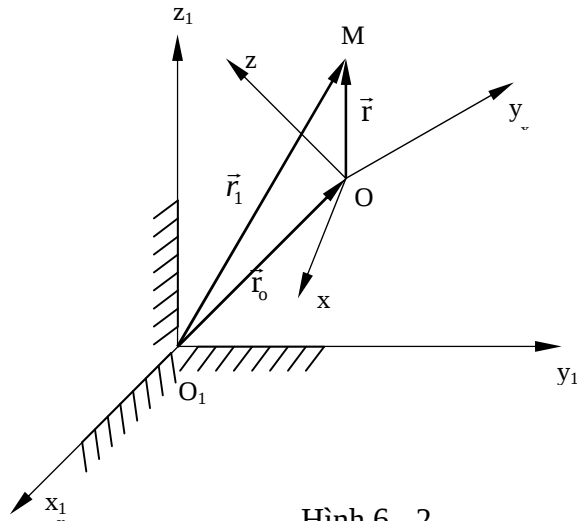
Vận tốc tuyế của M là:

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v}_a = \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left[\vec{v}_0 + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \right]$$

$$\text{hay } \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

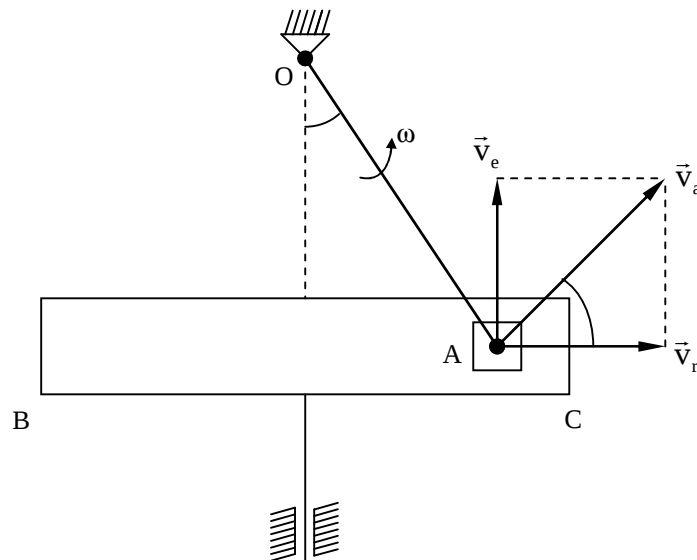
Vậy, định lý đã được chứng minh



Hình 6 - 2

Ví dụ : Cho cơ cấu tay quay culit với tay quay OA = 200mm quay đều với vận tốc $\omega = 3\pi \text{ rad/s}$, Con chày A nối bằng biên vào đầu mút tay quay chày trong rãnh BC làm culit chuyển động lên xuống. Xác định vận tốc của culit tại thời điểm tay quay lệch góc $= 30^\circ$ so với vị trí đứng thẳng.

Giải



- Chuyển động của con chy A trong rãnh BC là chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_r$ hướng theo phương ngang.
- Chuyển động của BC (culit) so với khung máy là chuyển động theo với vận tốc $\vec{v}_e$ hướng theo phương thẳng đứng.
- Chuyển động của con chy A so với khung máy là chuyển động trượt dài với vận tốc $\vec{v}_a$ tiếp tuyến với quỹ đạo tròn tại A.

Theo định lý hợp vận tốc ta có:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Theo sơ đồ hợp vận tốc, ta có:

Vận tốc của culit là:

$$\begin{aligned} v_e = v = v_a \cdot \sin \alpha &= OA \cdot \omega \cdot \sin \alpha \\ &= 200 \cdot 10^{-3} \cdot 3\pi \cdot \frac{1}{2} = 0,3\pi \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. Định lý hợp gia tốc

Tại mỗi thời điểm, gia tốc trượt dài bằng tổng hình học của gia tốc theo, gia tốc tịnh tiến dài và gia tốc Criolit.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (6-2)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_a) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left(\vec{v}_o + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \right] \\ &= \left(\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right) + \left[\vec{a}_o + \left(x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right) \right] + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Tổng hợp theo hợp vận tốc, ta có:

$$\text{Gia tốc tịnh tiến dài : } \vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

$$\text{Gia tốc theo: } \vec{a}_e = \vec{a}_o + \left(x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right)$$

$$\text{Gia tốc Oriolit : } \vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

Vậy: $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ (định lý đã được chứng minh)

• Chú ý:

- Trường hợp hệ quy chiếu động Oxyz chuyển động tịnh tiến thì
- $$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \quad (\text{nên } \vec{a}_c = 0)$$

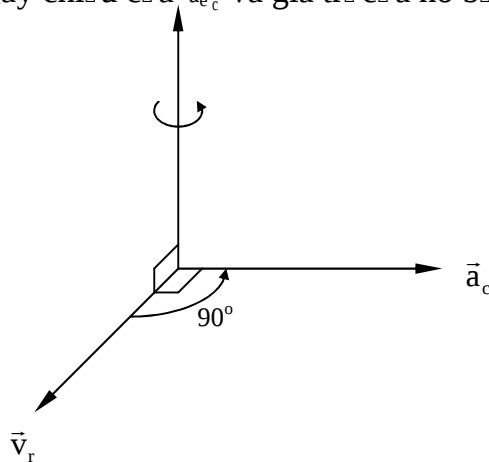
Vậy, khi chuyển động theo là chuyển động tịnh tiến thì gia tốc tuyệt đối bằng tổng hình học gia tốc theo và gia tốc tương đối.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (6-3)$$

- Trường hợp hệ quy chiếu động Oxyz chuyển động quay quanh trục cố định với vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ thì gia tốc Coriolis là $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r$ (18-4)

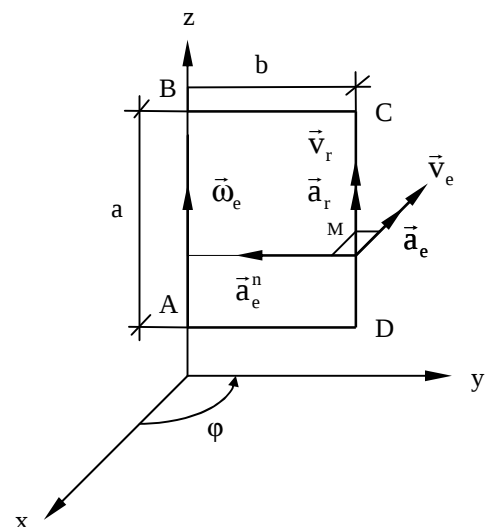
+ Khi trục đối xứng khớp sát nhau $\vec{\omega}_e // \vec{v}_r$ hoặc $\vec{v}_r = 0$ hay $\vec{\omega}_e = 0$ thì khi trục đối xứng này $\vec{a}_c = 0$

+ Nếu $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ (hình 18-3) thì quy tắc tìm phương chiếu của $\vec{a}_c$ như sau: quay $\vec{v}_r$ quanh trục của nó theo chiều quay của hệ động quanh trục $\vec{\omega}_e$ một góc 90° , ta có ngay chiều của $\vec{a}_c$ và giá trị của nó bằng $2 \vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r$.



Ví dụ: Một tấm chì nhớt có các cạnh là a và b quay quanh trục thẳng đứng theo quy luật $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Điểm M chuyển động dọc theo DC với quy luật $s = 3t^2$ (m, s). Tìm vận tốc, gia tốc tuyệt đối của M theo thời gian t.

Giải



- M chuyển động thẳng đều theo phương ngang thẳng đứng DC với vận tốc thẳng đều $\vec{v}_r$ và gia tốc thẳng đều $\vec{a}_r$ nằm trên trục này, đứng thẳng:

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 6t \quad ; \quad a_r = \frac{d^2s}{dt^2} = 6$$

- Chuyển động của M cùng với ABCD là chuyển động theo quỹ đạo thẳng tròn có bán kính b và vận tốc $\vec{v}_e$ vuông góc với bán kính tại thời điểm đang xét.

$$v_e = r.\omega = b \cdot \frac{d\varphi}{dt} = bt$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

$$\begin{aligned} a_e^n &= r.\omega^2 = b \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = b.t^2 \\ a_e^\tau &= r.\varepsilon = b \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = b \end{aligned}$$

Do vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ nằm trên Az nên có $\vec{\omega}_e // \vec{v}_r$,

suy ra: $\vec{a}_c = 0$

Vận tốc tuyế t đ i c a M :

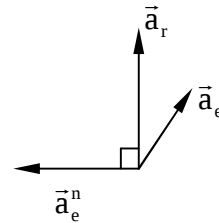
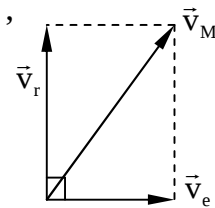
$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$v_M = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{(6t)^2 + (bt)^2} \quad (\text{cm/s})$$

Gia t i c tuyế t đ i c a M :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{a_r^2 + (a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (bt)^2 + b^2} \quad (\text{cm/s}^2) \end{aligned}$$



II. Chuyển động song phẳng

1. Định nghĩa

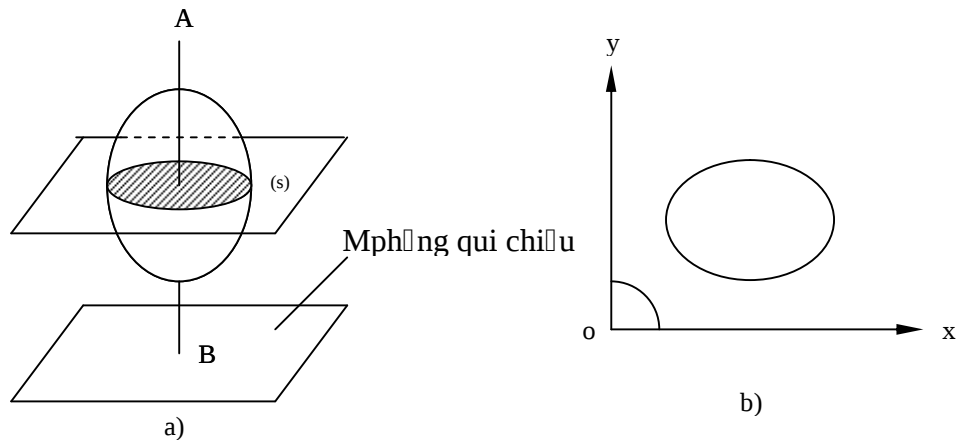
Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mọi điểm thuộc vật luôn đi thẳng trong những mặt phẳng cố định song song với mặt phẳng quy chiếu.

Ví dụ: Khi xe chạy trên đường, mọi điểm trên bánh xe di chuyển trong những mặt phẳng song song với mặt phẳng thẳng đứng chứa trục đường, nên bánh xe chuyển động song phẳng.

2. Khảo sát chuyển động của hình phẳng

a. Phương trình chuyển động của hình phẳng

Bài toán khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa vào bài toán khảo sát chuyển động của một titik điểm phẳng của nó trong mặt phẳng chứa titik điểm phẳng, song song với mặt phẳng quy chiếu. (hình 19-1 a, b)



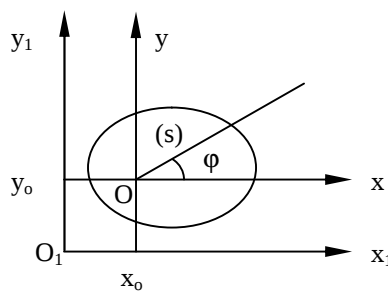
Xét chuyển động của hình phẳng (s) trong mp (P). Chọn hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1$. Lấy điểm O tùy ý thuộc (s) và gắn vào đó hệ trục Oxy có trục Ox và Oy luôn song song với O_1x_1 và O_1y_1 . Chuyển động của hình phẳng (s) được phân tích thành 2 chuyển động:

- Chuyển động tịnh tiến của hệ trục Oxy đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1$ (chuyển động theo).
- Chuyển động quay quanh điểm O của hình phẳng đối với hệ trục Oxy (chuyển động tròn quay)

Vậy chuyển động song phẳng của vật rắn có thể phân tích thành 2 chuyển động: chuyển động tịnh tiến cùng với trục c và chuyển động quay của vật quanh trục c (hình 19-2).

Do đó, phương trình chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng là:

$$x_o = x_o(t) ; y_o = y_o(t) ; \varphi = \varphi(t)$$



b. Các yếu tố động học của hình phẳng

- Chuyển động của hệ trục oxy là chuyển động tịnh tiến cùng với trục c nên trạng thái động học được xác định là vận tốc $\vec{v}_o$ và gia tốc $\vec{a}_o$.
- Chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục oxy được xác định bằng vận tốc góc ω và gia tốc góc ϵ

* Chú ý: Các đại lượng $\vec{v}_o$, $\vec{a}_o$ phải thuộc vào vị trí chọn trục c

3. Khảo sát chuyển động của điểm thuộc hình phẳng

a. Phân tích trình chuyển động

Xét điểm M thuộc hình phẳng S nằm cách trục O một khoảng $OM = R$

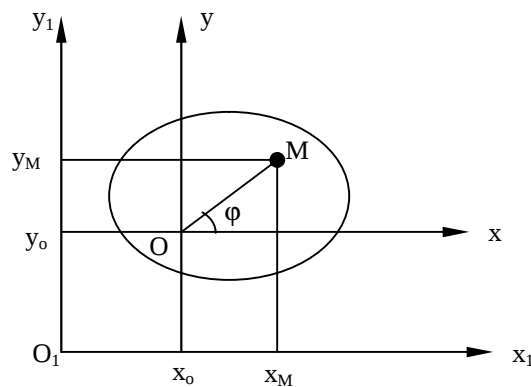
Vị trí của M được xác định:

$$x_M = x_o + R \cdot \cos \varphi$$

$$y_M = y_o + R \cdot \sin \varphi$$

vì x_o, y_o, φ luôn thay đổi theo thời gian, nên phương trình chuyển động của M là:

$$\begin{aligned} x_M(t) &= x_o(t) + R \cdot \cos \varphi(t) \\ y_M(t) &= y_o(t) + R \cdot \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (6-4)$$



Hình 6 – 3

b. Vận tốc của điểm

* Biểu thức giải tích của vận tốc.

Vận tốc của điểm M được xác định qua hình chiếu của nó trên hệ trục cố định $O_1x_1y_1$

$$\begin{cases} v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = x'_o - R \cdot \varphi' \cdot \sin \varphi = x'_o - R \cdot \omega \cdot \sin \varphi \\ v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = y'_o + R \cdot \varphi' \cdot \cos \varphi = y'_o + R \cdot \omega \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (6-5)$$

* Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng:

Như đã phân tích, chuyển động song phẳng của vật thể chẹt là tổng hợp của hai chuyển động:

– Chuyển động tịnh tiến cùng với trục O (chuyển động theo), nên :

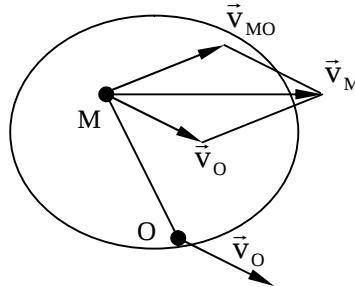
$$\vec{v}_e = \vec{v}_o.$$

– Chuyển động quanh trục O (chuyển động tịnh tiến). Nên vận tốc của M:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{Mo}$$

Mà $\vec{v}_{Mo} \perp OM$ và $v_{Mo} = OM \cdot \omega$ (ω là vận tốc góc của vật)

Theo định lý hợp vận tốc, ta có: $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{Mo}$

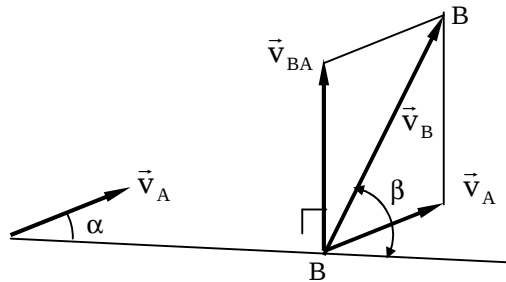


Định lý: Vận tốc của điểm thuộc hình phẳng bằng tổng hình học vận tốc của trục với vận tốc của điểm khi hình phẳng quay quanh trục.

Áp dụng cho 2 điểm A, B bất kỳ thuộc hình phẳng, ta có:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (6-6)$$

Trong đó, $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B do hình phẳng quay quanh trục A.



Chiếu đồng thời các vectơ lên pháp tuyến AB, ta được:

$$hc_{AB} \vec{v}_B = hc_{AB} \vec{v}_A$$

$$\text{hay } v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha \quad (6-7)$$

Vậy: Hình chiếu vận tốc 2 điểm bất kỳ thuộc hình phẳng lên pháp tuyến nối hai điểm thì bằng nhau.

* Tâm vận tốc tức thời và sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng:

Tâm vận tốc tức thời:

Tại thời điểm khảo sát, trên trục điểm P thuộc hình phẳng có vận tốc bằng không thì điểm đó gọi là tâm vận tốc tức thời.

Tại mọi thời điểm nếu $\omega \neq 0$, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng có vận tốc bằng không (trên trục duy nhất một tâm vận tốc tức thời).

* Sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng:

Ta xét sự phân bố vận tốc của điểm thuộc hình phẳng chuyển động song phẳng. Có 2 khả năng có thể xảy ra:

– Trường hợp $\omega \neq 0$:

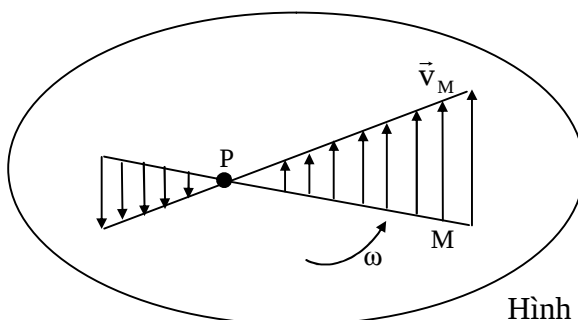
Lấy tâm vận tốc tức thời P làm gốc, khi đó:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}$$

$$\text{hay } \vec{v}_M = \vec{v}_{MO} \quad (\text{vì } \vec{v}_P = 0)$$

$$\text{và } \vec{v}_M \perp MP \text{ và } v_M = MP \cdot \omega$$

Vậy, tất cả các điểm, vận tốc các điểm thuộc hình phẳng phân bố giống nhau khi nó đang quay quanh tâm vận tốc tức thời P với vận tốc góc



Hình 6-4

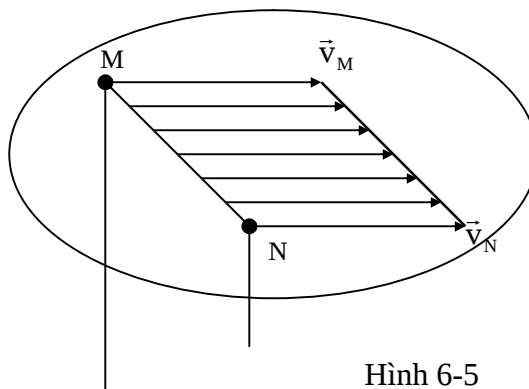
– Trường hợp $\omega = 0$ (không tồn tại tâm vận tốc tức thời)

Xét vận tốc 2 điểm M, N bất kỳ của hình phẳng,

$$\text{ta có: } \vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{v}_{MN}$$

$$\text{Do đó: } v_{MN} = MN \cdot \omega = 0 \text{ nên } \vec{v}_M = \vec{v}_N$$

Vậy khi $\omega = 0$ thì vận tốc các điểm thuộc hình phẳng đều bằng nhau (hình phẳng chuyển động tịnh tiến tức thời)

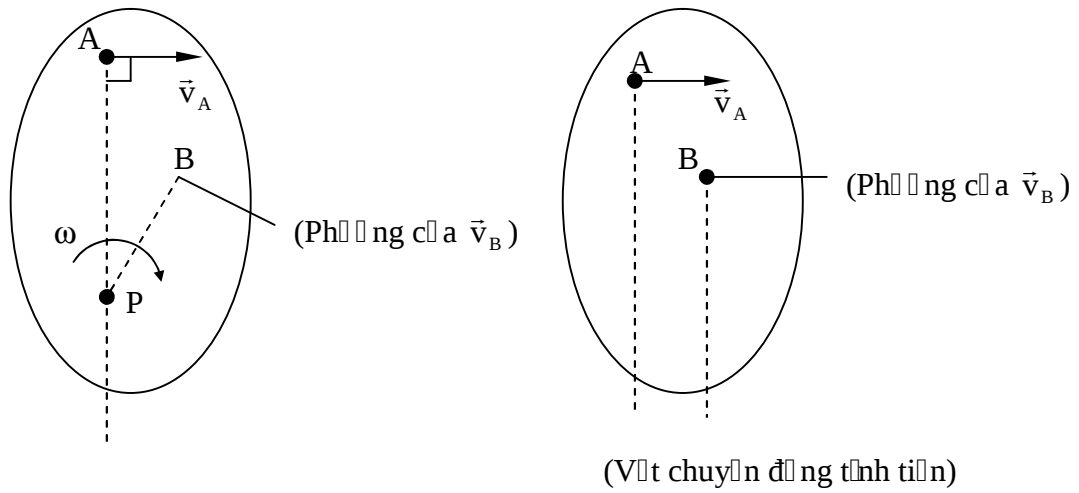


Hình 6-5

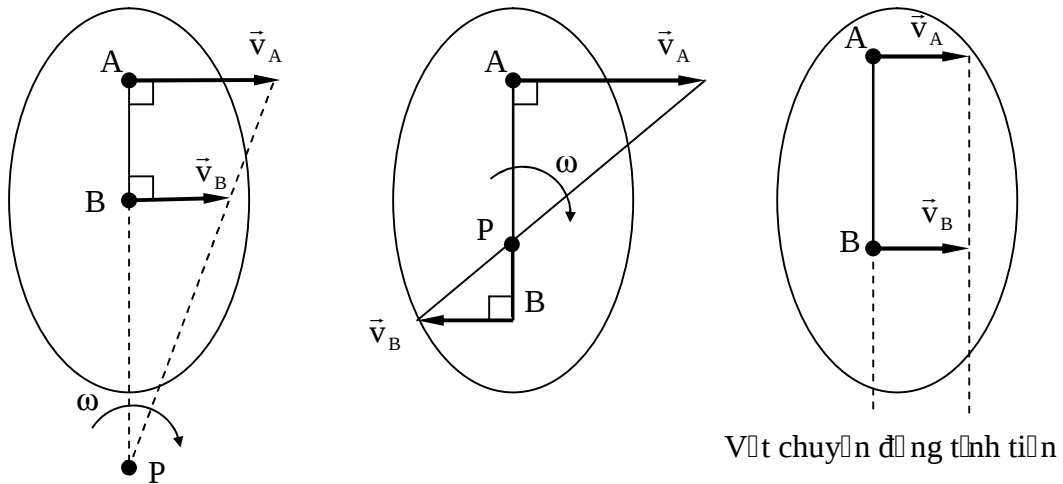
* Mục tiêu quy tắc xác định tâm vận tốc tức thời:

– Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc điểm B:

$$\omega = \frac{v_A}{PA}$$

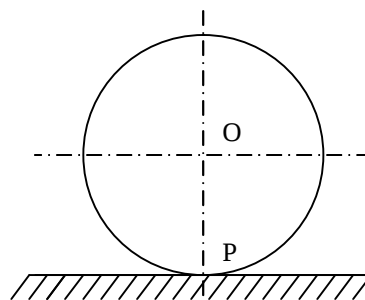


– Biết vận tốc 2 điểm A và B có phân // nhau và $\perp AB$:



$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

– Vật lăn không trượt trên mặt phẳng cố định: tiếp điểm là tâm vận tốc tức thời



Hình 6 - 6

c. Gia tốc của điểm

* Biểu thức giải tích:

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = \frac{d^2 x_M}{dt^2} = x_o'' - R \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi - R \omega^2 \cos \varphi \\ a_{My} = \frac{d^2 y_M}{dt^2} = y_o'' + R \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi - R \omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (6-8)$$

* Quan hệ gia tốc giữa hai điểm:

Định lý: Gia tốc của điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của gia tốc của O và gia tốc của điểm M trong chuyển động tròn quanh O.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO} = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^{\tau} + \vec{a}_{MO}^n \quad (6-9)$$

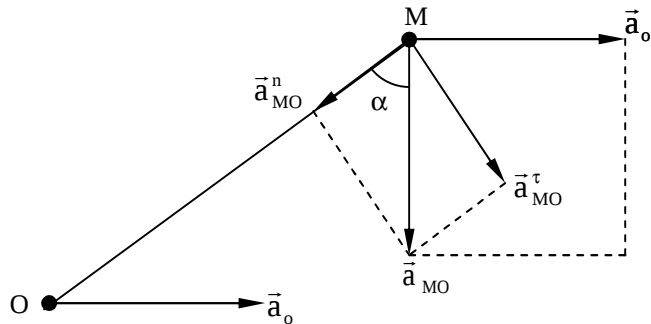
Trong đó:

$\vec{a}_{MO}^{\tau}$ và $\vec{a}_{MO}^n$ được tính như sau:

$$\vec{a}_{MO}^n = MO \cdot \omega^2$$

$$a = MO \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\vec{a}_{MO}^{\tau}}{\vec{a}_{MO}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$



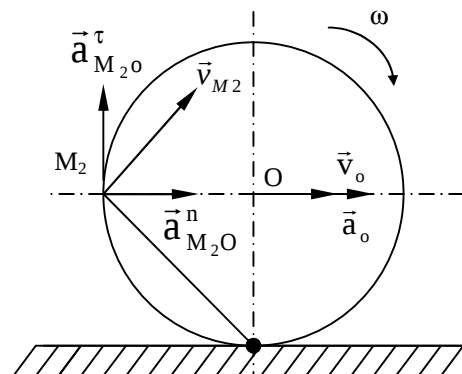
* Tâm gia tốc tức thời:

Điểm Q thuộc vật có gia tốc bằng không là thời điểm khi o sát được gọi là tâm gia tốc tức thời.

Tọa độ của điểm này và gia tốc góc của hình phẳng không đổi theo thời gian bằng không thì trục duy nhất mà tâm gia tốc.

* Ví dụ: Một bánh xe bán kính $R = 0,5\text{m}$ lăn không trượt trên mặt phẳng ngang cố định. Tính vận tốc và gia tốc của điểm M_2 . Biết tại thời điểm bánh xe có vận tốc $v_o = 1\text{m/s}$, $a_o = 1,5\text{m/s}^2$

Giải



Vì bánh xe lăn không trượt nên M_1 là tâm vận tốc tức thời: $v_{M_1} = 0$

Ta có: $v_o = M_1 O . \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{M_1 O} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/s}$

Tính tiếp: $v_{M_2} = M_1 M_2 . \omega = R . \sqrt{2} . \omega = 0,5 . \sqrt{2} . 2$

$$v_{M_2} = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Gia tốc của điểm M_2 :

Ta có: $\vec{a}_{M_2} = \vec{a}_o + \vec{a}_{M_2}^t + \vec{a}_{M_2}^n$

Trong đó:

$$\vec{a}_{M_2}^t = M_2 O . \varepsilon = R . \varepsilon = a_o = 1,5 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{M_2}^n = R . \omega^2 = 0,5 . 2^2 = 2 \text{ m/s}$$

Vậy: $a_{M_2} = \sqrt{(a_o + a_{M_2 O}^n)^2 + (a_{M_2 O}^t)^2}$

$$a_{M_2} = \sqrt{(1,5 + 2)^2 + (1,5)^2} \approx 1,8 \text{ m/s}$$